IES TRASSIERRA

PRUEBA ESCRITA 3ª EVAL MAT II CS-CI 18-5-2010

NOMBRE.______________________________

Realiza los 3 primeros ejercicios y elige uno entre el 4º y el 5º. SUERTE

1

2007/6/A/4

Ejercicio 4.- Considera el plano π de ecuación $2x+2y-z-6=0$ y el punto $P(1,0,-1)$.

(a) **[1'25 puntos]** Calcula la recta que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π.

(b) **[1'25 puntos]** Encuentra el punto simétrico de P respecto del plano π.

2

2006/1/A/3 Y 4

Ejercicio 3. Sean $\overrightarrow{u}=(x,2,0)$, $\overrightarrow{v}=(x,-2,1)$ y $\overrightarrow{w}=(2,-x,-4x)$ tres vectores de $\mathbb{R}^3$.

(a) **[1 punto]** Determina los valores de x para los que los vectores son linealmente independientes.

(b) **[1'5 puntos]** Halla los valores de x para los que los vectores son ortogonales dos a dos.

3

2005/3/A/4

Ejercicio 4. Se sabe que las rectas

$$r\equiv\begin{cases}x+y-z-3=0\\x+2y-2=0\end{cases}\qquad\text{y}\qquad s\equiv\begin{cases}ax+6y+6=0\\x-2z+2=0\end{cases}$$

son paralelas.

(a) **[1'5 puntos]** Calcula a.

(b) **[1 punto]** Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

4

2007/2/B/4

Ejercicio 4.- Considera los puntos $A(0,3,-1)$ y $B(0,1,5)$.

(a) **[1'25 puntos]** Calcula los valores de x sabiendo que el triángulo ABC de vértices $A(0,3,-1)$, $B(0,1,5)$ y $C(x,4,3)$ tiene un ángulo recto en C.

(b) **[1'25 puntos]** Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $(0,1,5)$ y $(3,4,3)$ y es paralelo a la recta definida por las ecuaciones $\begin{cases}x-y+z&=0\\2x+y&=3\end{cases}$

5

2007/3/B/4

Ejercicio 4.- [2'5 puntos]
Halla la ecuación de la recta contenida en el plano de ecuación $x+2y+3z-1=0$ que corta perpendicularmente a la recta definida por $\begin{cases}x=2z+4\\y=2z+3\end{cases}$ en el punto $(2,1,-1)$.

3ª EVALUACIÓN

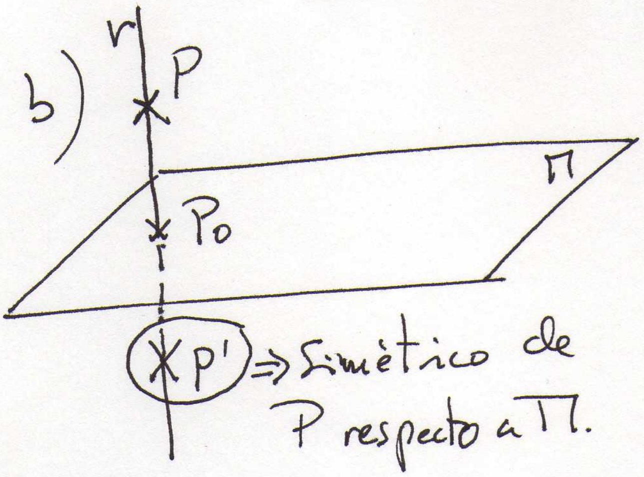
CORRECCIÓN

1.- $\pi \equiv 2x+2y-z-6=0 \quad P(1,0,-1)$

a) $r \begin{cases} P \in r \ (1,0,-1) \\ r \perp \pi \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{N}_\pi = (2,2,-1) \end{cases}$

$$\boxed{r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}}$$

b)



$\Rightarrow$ Simétrico de P respecto a π.

1º $\Rightarrow$ Hallamos P_0, como intersección de r con π.

$$r \equiv \begin{cases} 2(x-1) = 2\cdot y; \quad x-1=y; \quad x-y=1 \\ -1\cdot(y) = 2(z+1); \quad -y = 2z+2; \quad \underline{y+2z=-2} \end{cases}$$

$$P_0 \begin{cases} x - y = 1 \\ y + 2z = -2 \\ 2x+2y-z = 6 \end{cases} \quad \begin{aligned} x &= 1+y \\ z &= \frac{-2-y}{2} \end{aligned}$$

Sust. en π: $2\cdot(1+y) + 2y - \frac{-2-y}{2} = 6; \quad 2+2y+2y+\frac{2+y}{2} = 6$

$4+4y+4y+2+y = 12; \quad 9y = 6; \quad y = \frac{2}{3};$

$x = 1+y = 1+\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

$z = \dfrac{-2-\frac{2}{3}}{2} = \dfrac{-8/3}{2} = -\frac{4}{3}$

$$\boxed{P_0\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)}$$

2º.- Calculamos P' teniendo en cuenta que $\overrightarrow{PP_0} = \overrightarrow{P_0P'}$

$\overrightarrow{PP_0} = \left(\frac{5}{3}-1, \frac{2}{3}-0, -\frac{4}{3}+1\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right); \quad P'(x,y,z)$

$\overrightarrow{P_0P'} = \left(x-\frac{5}{3}, y-\frac{2}{3}, z+\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = \frac{4}{3} \\ z = -\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{P'\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right)}$

2.- $\vec{u}=(x,2,0)$, $\vec{v}=(x,-2,1)$, $\vec{w}=(2,-x,-4x)$

a) $x?$ / $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ lin. indep.

$$\begin{vmatrix} x, & 2 & 0 \\ x & -2 & 1 \\ 2 & -x & -4x \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ x & -2 & 1 \\ 2 & -x & -4x \end{vmatrix} = +8x^2+4+x^2+8x^2 =$$

$$= 17x^2+4 \not\Rightarrow$$

Como $17x^2+4=0$; $17x^2=-4$; $x^2=\frac{-4}{17}$; $\underline{x=\pm\sqrt{\frac{-4}{17}} \notin \mathbb{R}}$

No hay ningún valor real de x que anule el determinante, por tanto $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son, $\forall x \in \mathbb{R}$, linealmente independientes.

b) Halle x para que sean ortogonales 2 a 2.

$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0$; $(x,2,0)\cdot(x,-2,1) = x^2-4=0$;

Si $\boxed{x=\pm 2} \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

$\vec{u} \perp \vec{w} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{w}=0 \Rightarrow (x,2,0)\cdot(2,-x,-4x) = 2x-2x=0$

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{w}$

$\vec{v} \perp \vec{w} \Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{w}=0 \Rightarrow (x,-2,1)\cdot(2,-x,-4x) = 2x+2x-4x=0$

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{w}$.

3 $\quad r \equiv \begin{cases} x+y-z-3=0 & \vec{N}_1(1,1,-1) \\ x+2y \quad -2=0 & \to \vec{N}_2(1,2,0) \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} ax+6y+6=0 & \vec{N}_3(a,6,0) \\ x-2z+2=0. & \vec{N}_4(1,0,-2) \end{cases}$

a) r y s paralelas $\Rightarrow$ $\vec{V}_r$ es proporcional a $\vec{V}_s$

$$\vec{V}_r = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{k} - \vec{j} - \vec{k} + 2\vec{i} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} = \underline{\underline{(2,-1,1)}}$$

$$\vec{V}_s = \vec{N}_3 \times \vec{N}_4 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 6\vec{k} + 2a\vec{j} =$$

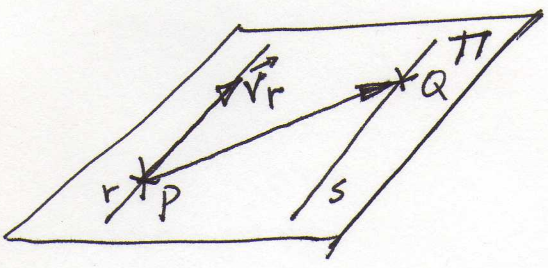
$$= (-12, 2a, -6)$$

Si $\vec{V}_r$ y $\vec{V}_s$ son proporcionales: $\dfrac{-12}{2} = \dfrac{2a}{-1} = \dfrac{-6}{1}$

$\dfrac{-12}{2} = -6 = \dfrac{2a}{-1}$; $\qquad 2a = 6$; $\boxed{a=3}$

$-\dfrac{6}{1} = -6$

b) Ecuación del plano que contiene a r y s



Tenemos $\vec{V}_r$.
Calculamos P en r y Q en s para buscar otro vector del plano.

$r \equiv \begin{cases} \text{I. } x+y = z+3 \\ \text{II. } x+2y = 2 \end{cases}$ II-I: $\begin{cases} y = -z-1 \\ x = 2-2y \\ z = z \end{cases}$ $\Big|$ $x = 2-2(-z-1) = \boxed{4+2z = x}$

Para $z=0$ $\quad y=-1$ $x=4$ $\quad P(4,-1,0)$ $\qquad \vec{PQ} = (-4,0,1)$

$a=3$: $\quad s \equiv \begin{cases} 3x+6y+6=0; & x+2y+2=0; & y = \dfrac{-x-2}{2} \\ x-2z+2=0; & x+2=2z & z = \dfrac{x+2}{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} x=0 \\ y=-1 \\ z=1 \end{matrix} \Big| \; Q(0,-1,1)$